

# Mathematik Formelsammlung

---

## Inhaltsverzeichnis

1	II.Klasse.....	5
1.1	Mengenlehre.....	5
1.2	Zahlenmenge.....	5
1.2.1	Vier Grundrechenarten.....	5
1.2.2	Vorzeichenregeln.....	6
1.2.3	Erweitern/Kürzen.....	6
1.2.4	Rechnen mit Brüchen.....	6
1.3	Grundlagen der Algebra: Terme und Potenzen.....	6
1.3.1	Multiplikation von Potenzen.....	6
1.3.2	Division von Potenzen.....	6
1.3.3	Potenzen mit negativen Hochzahlen.....	6
1.3.4	Potenzen von Produkten.....	6
1.3.5	Potenzen von Quotienten.....	7
1.3.6	Potenzieren von Potenzen.....	7
1.3.7	Wurzelschreibweise.....	7
1.3.8	Addition und Subtraktion von Wurzeln.....	7
1.3.9	Vereinfachen von Wurzelexponenten.....	7
1.3.10	Teilweises Wurzelziehen.....	7
1.3.11	Ausdruck unter die Wurzelbringen.....	7
1.3.12	Division von Wurzeln.....	7
1.3.13	Potenzieren von Wurzeln.....	7
1.3.14	Verschachtelte Wurzeln.....	7
1.3.15	Binomische Formeln und Zerlegungen.....	8
1.4	Lineare Gleichungen und Ungleichungen.....	8
1.4.1	Prozentrechnung.....	8
1.5	Funktionen der Wirtschaft.....	8
	Lineare Funktion.....	8
	Kostenfunktion K.....	8
	Erlösfunktion E.....	8
	Gewinnfunktion G.....	8
1.6	Matrizenrechnung.....	9
1.6.1	Matrizen.....	9
1.7	Gleichungen höheren Grades – Polynomfunktionen.....	9
1.7.1	Quadratische Funktion.....	9
1.7.2	ABC/Mitternachtsformel.....	9
2	III. Klasse.....	10
2.1	Polynomfunktionen.....	10
2.2	Logarithmusfunktionen.....	10
2.2.1	Rechenregeln:.....	10
2.3	Wachstum und Zerfall.....	10
2.4	Finanzmathematik.....	10
2.4.1	Zinsen- und Zinseszinsrechnung.....	10
2.4.2	Rentenrechnung.....	11
2.5	Planimetrie.....	11
2.5.1	Flächenformel eines allgemeinen Dreiecks.....	11
2.5.2	Rechtwinkeliges Dreieck.....	11

2.5.3	Gleichseitiges Dreieck.....	12
2.5.4	Quadrat und Rechteck.....	12
2.5.5	Parallelogramm .....	12
2.5.6	Trapez .....	12
2.5.7	Deltoid .....	12
2.5.8	Kreis .....	12
2.6	Stereometrie .....	12
2.6.1	Würfel.....	12
2.6.2	Quader.....	12
2.6.3	Prisma .....	12
2.6.4	Pyramide.....	12
2.6.5	Zylinder .....	12
2.6.6	Kegel .....	13
2.6.7	Kugel .....	13
2.7	Trigonometrie.....	13
2.7.1	Rechtwinkeliges Dreieck.....	13
2.7.2	Trigonometrische Flächeninhaltsformel .....	13
2.7.3	Sinussatz .....	13
2.7.4	Cosinussatz .....	13
3	IV. Klasse.....	14
3.1	Kurs und Rentabilitätsrechnung.....	14
3.1.1	Der Emissionskurs (Ausgabekurs) $C_0$ heißt .....	14
3.1.2	Zusammenhang zwischen Kurs $C$ und Effektivverzinsung $i'$ .....	14
3.1.3	Kursformel bei Tilgung zum Nennwert.....	14
3.2	Investitionsrechnung .....	15
3.2.1	Kapitalwert $C_0$ (Net Present Value NPV oder Goodwill) .....	15
3.2.2	Annuitätenmethode .....	15
3.2.3	Wiedergewinnungsfaktor .....	15
3.2.4	Methode des internen Zinssatzes .....	15
3.2.5	Methode des modifizierten internen Zinssatzes .....	15
3.3	Differenzialrechnung .....	15
3.3.1	1. Ableitung: $f'(x)$ .....	16
3.3.2	2. Ableitung: $f''(x)$ .....	16
3.3.3	Ableitungsregeln.....	16
3.3.4	3.2.3Wichtige Ableitungen:.....	17
3.4	Funktionsdiskussion .....	17
3.4.1	Monotonie.....	17
3.4.2	Symmetrie .....	17
3.4.3	Achsenschnittpunkte.....	17
3.4.4	Asymptoten .....	17
3.5	Anwendung der Differentialrechnung.....	18
3.5.1	Extremwertaufgaben.....	18
3.5.2	Regressionsrechnung .....	18
3.6	Kosten – und Preistheorie .....	18
3.6.1	Gesamtkostenfunktion .....	18
3.6.2	Grenzkosten $K'(x)$ .....	18
3.6.3	Stückkostenfunktion oder Durchschnittskostenfunktion .....	18
3.6.4	Angebot, Nachfrage, Marktpreis, Gleichgewichtsmenge .....	19
3.6.5	Erlösfunktion .....	19
3.6.6	Gewinn.....	20

# Bezeichnungsverzeichnis

## Finanzmathematik

<b>i</b>	ganzjähriger dekursiver Zinssatz
<b>i<sub>m</sub></b>	unterjähriger Zinssatz
<b>K<sub>0</sub>,PV</b>	Barwert des Kapitals, Anfangskapital
<b>K<sub>n</sub>,FV</b>	Endwert des Kapitals
<b>n</b>	Verzinsungsdauer in Jahren
<b>n</b>	Anzahl der Raten
<b>p</b>	Anzahl Raten pro Jahr
<b>r</b>	Aufzinsungsfaktor
<b>R</b>	Rate
<b>r<sub>m</sub></b>	unterjähriger Aufzinsungsfaktor
<b>T</b>	Anzahl der Zinstage
<b>Z</b>	Zinsen

## Trigonometrie

<b>gk</b>	Ankathete
<b>ak</b>	Gegenkathete
<b>h</b>	Hypotenuse

## Planimetrie

<b>A</b>	Fläche
<b>V</b>	Volumen
<b>M</b>	Mantelfläche
<b>O</b>	Oberfläche
<b>G</b>	Grundfläche
<b>a,b,c,</b>	Seiten des Dreiecks
<b>g</b>	Grundlinie
<b>h</b>	Höhe
<b>d,p,q</b>	Diagonalen
<b>r</b>	Radius
<b>s</b>	Mantellinie

## Zahlenmenge

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$	Natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3, \dots\}$	Natürlichen Zahlen ohne null
$\mathbb{N}_g = \{2,4,6, \dots\}$	Geraden natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_u = \{1,3,5, \dots\}$	Ungeraden natürlicher Zahlen

## Funktionen

<b>f</b>	$D \rightarrow W$
<b>D</b>	Definitionsmenge
<b>W</b>	Wertemenge
<b>k</b>	Steigung
<b>d</b>	y-Achsenabschnitt
<b>K(x) = k * x + F</b>	lineare Gesamtfunktion
<b>k</b>	proportionale Kosten pro erzeugte Einheit ohne Fixkosten
<b>x</b>	Anzahl der erzeugten Einheiten
<b>k*x</b>	variable Kosten, proportional zur erzeugten Stückzahl
<b>F</b>	Fixkosten
<b>K(x)</b>	Gesamtkosten für x erzeugte Einheiten
<b>x=0</b>	Gleichung der y-Achse
<b>y=0</b>	Gleichung der x-Achse
<b>y=x</b>	Gleichung der ersten Mediane
<b>y=d</b>	Gerade durch den Ursprung (0 0) mit der Steigung k

<b>Nominelle Größen</b>	
$K_0$	Nominalwert; Nennwert der Anleihe
K	Kuponzahlung $K = K_0 * i$
i	nomineller verbriefteter Zinssatz
n	Laufzeit in Jahren
<b>Vom Markt abhängige Größen</b>	
$K_0'$	Realkapital; Kaufpreis; Barwert der künftigen Leistungen des Schuldners zum effektiven Zinssatz $i'$
$i'$	effektiver Zinssatz, Rendite Rentabilität
$PV(i_M)$	Barwert der Anleihe zum Marktzinssatz $i_M$
<b>Investitionsrechnung</b>	
$A_0$	Anschaffungskosten, Kapitaleinsatz
n	Nutzungsdauer in Jahren
$A_1, A_2, \dots, A_n$	laufende jährliche Ausgaben
$E_1, E_2, \dots, E_n$	laufende jährliche Einnahmen
$R_t = E_t - A_t$	Rückfluss im Jahr t, Ertrag im Jahr t
$i_k$	kalkulatorischer Zinssatz
$i_r$	Wiederveranlagungszinssatz Reinvestitionszinssatz
A Annuität	Ist die Summe der auf den Zeitpunkt der Anschaffung abgezinsten Rückflüsse (Einnahmen minus Ausgaben) minus den Anschaffungskosten
<b>Aktienanalyse</b>	
$R_t$	Rendite zum Zeitpunkt t
$\bar{r}$	Mittelwert der Renditen
N	Anzahl der Renditen
<b>Integralrechnung</b>	
$f(x)$	Integral
x	Integrationsvariable
a, b	Integrationsgrenzen

# 1 II.Klasse

## 1.1 Mengenlehre

$\emptyset, \{\}$	Leere Menge eine Menge, die kein Element enthält
$A = B$	Gleichheit der Menge A und B (Die Menge) A ist gleich (der Menge) B
$A \subseteq B$	Die Menge A ist Teilmenge von G. A ist Teilmenge von G
$A \cap B = \{x   (x \in A) \wedge (x \in B)\}$	Durchschnittsmenge von A und B A geschnitten mit B
$A \cup B = \{x   (x \in A) \vee (x \in B)\}$	Vereinigungsmenge von A und B A vereinigt B
$A \setminus B = \{x   (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$	Differenzmenge von A und B A ohne B
$C_G A = \{x   (x \in G) \wedge (x \notin A)\}$ mit $A \subseteq G$	Die Menge $C_G A$ ist Komplementärmenge von A in Bezug auf G. Komplement von A in G
$A \times B = \{(a b)   (a \in A) \wedge (b \in B)\}$	Produktmenge von A und B A kreuz B

## 1.2 Zahlenmenge

### 1.2.1 Vier Grundrechenarten

Addition	2	+	3	=	5
	Summand	plus	Summand	=	Summe
Subtraktion	5	-	2	=	3
	Minued	minus	Subtrahend	=	Differenz
Multiplikation	2	*	3	=	6
	Faktor	mal	Faktor	=	Produkt
Division	6	:	2	=	3
	Dividend	geteilt durch	Divisor	=	Quotient

### 1.2.2 Vorzeichenregeln

Vorzeichenregeln	Multiplikation	Division
$+(+a) = a$	$(+a) * (+b) = a * b$	$(+a) : (+b) = a : b$
$+(-a) = -a$	$(+a) * (-b) = -a * b$	$(+a) : (-b) = -a : b$
$-(+a) = -a$	$(-a) * (+b) = -a * b$	$(-a) : (+b) = -a : b$
$-(-a) = +a$	$(-a) * (-b) = a * b$	$(-a) : (-b) = a : b$

### 1.2.3 Erweitern/Kürzen

$$\frac{a * m}{b * m} = \frac{a}{b}$$

### 1.2.4 Rechnen mit Brüchen

Summe	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a * d + b * c}{b * d}$
Differenz	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a * d - b * c}{b * d}$
Produkt	$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$
Quotient	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a * d}{b * c}$

## 1.3 Grundlagen der Algebra: Terme und Potenzen

Die **Grundmenge G** eines Terms ist die Menge der Elemente, die anstelle der Variablen in den Term eingesetzt werden.

Die **Definitionsmenge D** eines Terms besteht aus den Elementen der Grundmenge, durch die der Term zu einer reellen Zahl wird, Die **Division durch null** ist nicht zulässig.

### 1.3.1 Multiplikation von Potenzen

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

### 1.3.2 Division von Potenzen

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

### 1.3.3 Potenzen mit negativen Hochzahlen

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### 1.3.4 Potenzen von Produkten

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

### 1.3.5 Potenzen von Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

### 1.3.6 Potenzieren von Potenzen

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$$

### 1.3.7 Wurzelschreibweise

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

### 1.3.8 Addition und Subtraktion von Wurzeln

$$r \cdot \sqrt[n]{a^m} \pm s \cdot \sqrt[n]{a^m} = (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a^m}$$

### 1.3.9 Vereinfachen von Wurzelexponenten

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### 1.3.10 Teilweises Wurzelziehen

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

### 1.3.11 Ausdruck unter die Wurzelbringen

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

### 1.3.12 Division von Wurzeln

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n \cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}$$

### 1.3.13 Potenzieren von Wurzeln

$$(\sqrt[n]{a^m})^q = \sqrt[n]{a^{m \cdot q}}$$

### 1.3.14 Verschachtelte Wurzeln

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

### 1.3.15 Binomische Formeln und Zerlegungen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b) * (a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) * (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) * (a^2 + ab + b^2)$$

## 1.4 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

### 1.4.1 Prozentrechnung

G	Grundwert
$i = \frac{p}{100} = p\%$	Prozentsatz
$P = G * \frac{p}{100} = G * i$	Prozentwert

## 1.5 Funktionen der Wirtschaft

### Lineare Funktion

$$y = k * x + d$$

### Kostenfunktion K

$$K(x) = k * x + F$$

### Erlösfunktion E

$$E(x) = p * x$$

### Gewinnfunktion G

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

### Parabel

$$y = x^n$$

### Hyperbel

$$y = \frac{1}{x^n}$$

f:y=x lineare Funktionsgleichung (Gerade)

f:y=x<sup>2</sup> gerade Exponenten (achsensymmetrische Parabel)

f:y=x<sup>3</sup> ungerade Exponenten (punktsymmetrische Parabel)

f:y=x<sup>-2</sup> Gerade Exponenten (achsensymmetrische Hyperbel)

f: y = x<sup>-3</sup> ungerade Exponenten (punktsymmetrische Hyperbel)



## 1.6 Matrizenrechnung

### 1.6.1 Matrizen

$m * n$        $m$  Zeilen \*  $n$  Spalten

## 1.7 Gleichungen höheren Grades – Polynomfunktionen

### 1.7.1 Quadratische Funktion

$$ax^2 + bx + c = 0$$

### 1.7.2 ABC/Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 2 III. Klasse

### 2.1 Polynomfunktionen

Polynomfunktion vom Grad n

$$f: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Fundamentalsatz der Algebra:

Eine Gleichung n-ten Grades hat höchstens n reelle Lösungen. Diese Lösungen müssen nicht voneinander verschieden sein.

Quadratische Funktion Grad n

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

### 2.2 Logarithmusfunktionen

Lg x Logarithmus zur Basis 10

Ln x Logarithmus zur Basis e

#### 2.2.1 Rechenregeln:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$$

### 2.3 Wachstum und Zerfall

$$y(t) = k \cdot t + y(0) \quad \text{Lineares Wachstum}$$

$$y(t) = y(0) \cdot (1 + i)^t \quad \text{Exponentielles Wachstum}$$

$$2y_0 = y_0(1 + i)^T \quad \text{Verdoppelungszeit}$$

$$\frac{y_0}{2} = y_0(1 + i)^{\frac{T_1}{2}} \quad \text{Halbwertszeit}$$

$$y(t) = \frac{M}{1 + b \cdot e^{-h \cdot t}} \quad \text{Logistisches Wachstum}$$

M Kapazitätsgrenze

### 2.4 Finanzmathematik

#### 2.4.1 Zinsen- und Zinseszinsrechnung

##### 2.4.1.1 Einfache Verzinsung

$$Z = K_0 \cdot i \cdot n \quad K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

Tageszinsformel für  $n = \frac{T}{360}$

$$K_n = K_0 * (1 + i * \frac{T}{360})$$

### 2.4.1.2 Zinseszins

Aufzinsungsfaktor:  $r = 1 + i$

$$K_n = K_0 * (1 + i)^n = K_0 * r^n$$

## 2.4.2 Rentenrechnung

nachschüssig: **Barwert**  $PV_n = R * \frac{1-r^{-n}}{r-1}$

**Endwert**  $FV_n = R * \frac{r^n-1}{r-1}$

vorschüssig: **Barwert**  $PV_v = Rr * \frac{1-r^{-n}}{r-1}$

**Endwert**  $FV_v = Rr * \frac{r^n-1}{r-1}$

## 2.5 Planimetrie

$A$	Fläche
$V$	Volumen
$M$	Mantelfläche
$O$	Oberfläche
$G$	Grundfläche
$a, b, c, \dots$	Seiten des Dreiecks
$g$	Grundlinie
$h$	Höhe
$d, e, f$	Diagonalen
$r$	Radius
$s$	Mantellinie

### 2.5.1 Flächenformel eines allgemeinen Dreiecks

$$A = \frac{g * h}{2}$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A = \frac{a+b+c}{2}$$

### 2.5.2 Rechtwinkeliges Dreieck

Flächenformel  $A = \frac{a*b}{2}$

Satz des Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz  $h^2 = p * q$

Kathetensatz  $a^2 = c * p$   $b^2 = c * q$

### 2.5.3 Gleichseitiges Dreieck

Flächenformel  $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$   $h^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

### 2.5.4 Quadrat und Rechteck

Flächenformel Quadrat  $A = a^2$

Flächenformel Rechteck  $A = a * b$   $d^2 = a^2 + b^2$

### 2.5.5 Parallelogramm

Flächenformel  $A = g * h$

### 2.5.6 Trapez

Flächenformel  $A = \frac{a+c}{2} h = mh$

### 2.5.7 Deltoid

Flächenformel  $A = \frac{e*f}{2}$

### 2.5.8 Kreis

Flächenformel  $A = r^2\pi$

Umfang  $u = 2r\pi$

Bogen  $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$

Sektor  $\frac{r^2\pi\alpha}{360}$

## 2.6 Stereometrie

### 2.6.1 Würfel

Volumen  $V = a^3$

Oberfläche  $A = 6a^2$

### 2.6.2 Quader

Volumen  $V = abc$

Oberfläche  $A = 2(ab + ac + bc)$

### 2.6.3 Prisma

Volumen  $V = Gh$  G...Grundfläche

### 2.6.4 Pyramide

Volumen  $V = \frac{Gh}{3}$

### 2.6.5 Zylinder

Volumen  $V = Gh = r^2\pi h$

Mantelfläche  $M = 2r\pi * h$

### 2.6.6 Kegel

Volumen  $V = \frac{Gh}{3} = \frac{r^2\pi h}{3}$

Mantelfläche  $M = r\pi * s$  s...Mantellinie

### 2.6.7 Kugel

Volumen  $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Oberfläche  $O = 4r^2\pi$

## 2.7 Trigonometrie

### 2.7.1 Rechtwinkeliges Dreieck

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

### 2.7.2 Trigonometrische Flächeninhaltsformel

$$A = \frac{a * b * \sin \gamma}{2} = \frac{a * c * \sin \beta}{2} = \frac{b * c * \sin \alpha}{2}$$

### 2.7.3 Sinussatz

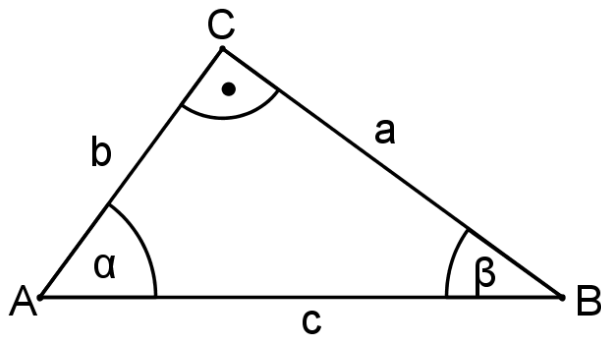
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

### 2.7.4 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



## 3 IV. Klasse

### 3.1 Kurs und Rentabilitätsrechnung

#### 3.1.1 Der Emissionskurs (Ausgabekurs) $C_0$ heißt

al pari, wenn	$C_0 = 100$
unter pari, wenn	$C_0 < 100$ (Disagio, Abgeld)
über pari, wenn	$C_0 > 100$ (Agio, Aufgeld)

Kaufpreis	$K'_0 = \frac{C_0}{100} * K_0$	$Kaufpreis = \frac{\text{Ausgabekurs}}{100} * \text{Nennwert}$
Ausgabekurs	$C_0 = \frac{K'_0}{K_0} * 100$	$Ausgabekurs = \frac{\text{Kaufpreis}}{\text{Nennwert}} * 100$
Tilgungsbetrag	$T = \frac{C_n}{100} * K_0$	

Der Marktzins  $i_M$  orientiert sich an der Sekundärmarktrendite.

Im Normalfall gilt:  $i_M = i'$ , d. h. die Rendite entspricht dem Marktzins.

#### 3.1.2 Zusammenhang zwischen Kurs C und Effektivverzinsung $i'$

Je niedriger der Kurs C, umso höher ist die Effektivverzinsung  $i'$ , und je höher der Kurs, umso niedriger ist die Effektivverzinsung.

$i' < i \Leftrightarrow K'_0 > K_0 \Leftrightarrow C > 100$	Notierung über pari
$i' > i \Leftrightarrow K'_0 < K_0 \Leftrightarrow C < 100$	Notierung unter pari
$i' = i \Leftrightarrow K'_0 = K_0 \Leftrightarrow C = 100$	Notierung al pari

#### 3.1.3 Kursformel bei Tilgung zum Nennwert

Barwert $PV(i_M)$	$K_0 * i * \frac{1 - (1 + i_M)^{-n}}{i_M} T * (1 + i_M)^{-n}$	
Kurs $C(i_M)$	$100 * i * \frac{1 - (1 + i_M)^{-n}}{i_M} 100 * (1 + i_M)^{-n}$	für $K_0 = 100$

## 3.2 Investitionsrechnung

### 3.2.1 Kapitalwert $C_0$ (Net Present Value NPV oder Goodwill)

$$C_0 = -A_0 + \sum_{t=1}^n \frac{E_t + A_t}{(1 + i_k)^t} = -A_0 + \underbrace{\sum_{t=1}^n R_t * (1 + i_k)^t}_{PV}$$

### 3.2.2 Annuitätenmethode

$$A = C_0 * \frac{i_k}{1 - (1 + i_k)^{-n}}$$

### 3.2.3 Wiedergewinnungsfaktor

$$\frac{i_k}{1 - (1 + i_k)^{-n}}$$

### 3.2.4 Methode des internen Zinssatzes

$$C_0(i_0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -A_0 + \sum_{t=1}^n \frac{R_t}{(1 + i_0)^t}$$

Der Zinssatz  $i_0$ , für den der Kapitalwert gleich null ist, heißt interner Zinssatz (Internal Rate of Return IRR).

Eine Investition ist vorteilhaft, wenn  $i_0 < i_k$  ist. ( $IRR < i_k$ )

### 3.2.5 Methode des modifizierten internen Zinssatzes

$$A_0 * (1 + i_{mod})^n = E \text{ mit } E = \sum_{t=1}^n R_t * (1 + i_n)^{n-t}$$
$$i_{mod} = \sqrt[n]{\frac{E}{A_0}} - 1$$

## 3.3 Differenzialrechnung

Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate = Steigung der Sekante

$$\text{Steigung der Sekante } s: k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Differentialquotient = Momentane Änderungsrate = Steigung an der Stelle  $x_0$

$$\text{Steigung der Tangente } s: h = 0 \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$$

### 3.3.1 1. Ableitung: $f'(x)$

### 3.3.2 2. Ableitung: $f''(x)$

### 3.3.3 Ableitungsregeln

#### 1. Ableitung der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n * x^{n-1}$$

#### 2. Ableitung der konstanten Funktion (Zahl)

$$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

#### 3. Faktorregel

$$[a * f(x)]' = a * f'(x)$$

#### 4. Summenregel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

#### 5. Produktregel

$$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

#### 6. Quotienten Regel

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

#### 7. Kettenregel

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$$

#### 8. Ableitung spezieller Funktionen

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{1 \cdot f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} * f'(x)$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1 \cdot f'(x)}{f(x)}$$



### 3.3.4 3.2.3 Wichtige Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x * \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 * \sqrt{x}}$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2 * \sqrt{f(x)}}$

## 3.4 Funktionsdiskussion

### 3.4.1 Monotonie

Die Funktion  $f$  ist streng monoton steigend wenn  $f(x_1) < f(x_2)$

Die Funktion  $f$  ist streng monoton fallend wenn  $f(x_1) > f(x_2)$

### 3.4.2 Symmetrie

$f(-x) = f(x)$  gerade Funktion, symmetrisch bezüglich der y-Achse  
Achsensymmetrisch

$f(-x) = -f(x)$  ungerade Funktion, symmetrisch bezüglich des Ursprungs  
punktsymmetrisch

### 3.4.3 Achsenschnittpunkte

$f(x_0) = 0$   $x_0$  ist die Nullstelle von  $y = f(x)$

$N(x_0 | 0)$  Schnittpunkt mit der x-Achse

$y(0 | f(0))$  Schnittpunkt mit der y-Achse

### 3.4.4 Asymptoten

- Senkrechte Asymptoten
- Waagrechte Asymptoten
- Schräge Asymptoten

## 3.5 Anwendung der Differentialrechnung

### 3.5.1 Extremwertaufgaben

Hauptbedingung (HB) aufstellen = Zielfunktion

Nebenbedingung (NB) aufstellen = Zusammenhang beschreiben

NB in HB einsetzen -> Maximum/Minimum von  $f(x)$  berechnen

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

### 3.5.2 Regressionsrechnung

Methode der kleinsten Quadrate

## 3.6 Kosten – und Preistheorie

### 3.6.1 Gesamtkostenfunktion

Gesamtkostenfunktion  $K(x) = K_v(x) + F$

Lineare Kostenfunktion  $K(x) = kx + F$

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + F$

Eigenschaften einer Polynomfunktion 3. Grades

Streng Monoton wachsend

Kostenkehre = Wendepunkt

Keine Extremwerte, keine Nullstellen

S – Förmiger Verlauf

### 3.6.2 Grenzkosten $K'(x)$

Differenzenquotient  $\frac{K(x+1) - K(x)}{(x+1) - x} = K(x+1) - K(x)$

### 3.6.3 Stückkostenfunktion oder Durchschnittskostenfunktion

#### 3.6.3.1 durchschnittliche Gesamtkosten

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \bar{K}(x)$$

⇒ Das Minimum der durchschnittlichen Gesamtkosten ist das Betriebsoptimum

⇒ die zugehörigen minimalen durchschnittlichen Gesamtkosten heißen **langfristige Preisuntergrenze**

### 3.6.3.2 durchschnittliche variablen Kosten

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

⇒ Das Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten ist das **Betriebsminimum**

⇒ die zugehörigen minimalen variablen Durchschnittskosten heißen **kurzfristige Preisuntergrenze**

### 3.6.4 Angebot, Nachfrage, Marktpreis, Gleichgewichtsmenge

Marktpreis + Gleichgewichtsmenge ergeben sich als Schnittpunkt von Angebots und Nachfragefunktion

### 3.6.5 Erlösfunktion

$$E(x) = x * P_n(x)$$

$P_n(x)$  Nachfragefunktion

$P$  konstanter Preis

$P_n(x)$  variabler Preis

### 3.6.5.1 Elastizität

$\varepsilon$  Elastizität

$$\varepsilon = \frac{\text{relative Mengenänderung}}{\text{relative Preisänderung}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Die Elastizität der Nachfrage gibt die prozentuelle Absatzänderung als Folge einer Preisänderung um 1% an.

### 3.6.5.2 Punkt Elastizität (Differenzialquotient)

$$\varepsilon(x) = \frac{p(x)}{x} * \frac{1}{p'(x)}$$

$\varepsilon_N < -1$  elastisch

$\varepsilon_N = -1$  fließend

$\varepsilon_N > -1$  unelastisch

### 3.6.5.3 Elastizität des Angebots

$\mathcal{E}_A > 1$       elastisch

$\mathcal{E}_A = 1$       elastisch

$\mathcal{E}_A < 1$       unelastisch

### 3.6.6 Gewinn

$G(x) = E(x) - K(x)$       Gewinn = Erlös - Kosten

$G'(x) = E'(x) - K'(x)$       Grenzgewinn = Grenzerlös – Grenzkosten = Änderung eines Gewinnes

Gewinn-Maximierungsprinzip

$$E'(x_g) = K'(x_g) \text{ oder } G'(x_g) = 0$$

Die Produktmenge  $x_g$ , bei der der maximale Gewinn erzielt wird, heißt **cournotsche Menge**.

Der Preis  $P(x_g)$  heißt **cournotscher Preis**.

Der Punkt  $C(x_g | p(x_g))$  auf der Nachfragefunktion heißt **cournotscher Punkt**.

Formeln bei konstantem Preis (= vollkommene Konkurrenz)

$E(x) = p * x$	<b>Erlös</b> (linear)
$E'(x) = p (> 0)$	<b>Grenzerlös</b> = Preis
$G(x) = E(x) - K(x)$	<b>Gewinn</b> , Erlös – Gesamtkosten
$g(x) = \frac{G(x)}{x} = p - k(x)$	<b>Gewinn pro Stück</b> , Durchschnittsgewinn
$D(x) = E(x) - K_v(x)$	<b>Deckungsbeitrag</b> , Erlös – variable Gesamtkosten
$d(x) = \frac{D(x)}{x} = p - \frac{K_v(x)}{x} = p - K_v(x)$	<b>Deckungsbeitrag pro Stück</b> , Grenzerfolg

Formeln bei monopolistischer Konkurrenz

$$E(x) = x \cdot p_n(x)$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$